

Ғылыми жоба **AP23486342**

«Сингулярлы коэффициенттері бар Штурм–Лиувиль операторы үшін дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер»

2024–2026 жылдарға арналған гранттық қаржыландыру шеңберінде

Жоба жетекшісі: жаратылыстану және информатизация факультетінің деканы, PhD докторы **Ескермесұлы Әлібек**

Жобаны іске асыру мерзімі мен қаржыландыру көлемі

Жалпы қаржыландыру көлемі — **75 359 323,00 теңге**, оның ішінде жылдар бойынша:

- **2024 жылға** – 25 341 212,00 теңге;
- **2025 жылға** – 25 171 039,00 теңге;
- **2026 жылға** – 24 847 072,00 теңге.

Жобаның мақсаты

Сингулярлы коэффициенттері және сингулярлы бастапқы әрі шеттік шарттары бар классикалық және бөлшектік Штурм–Лиувиль типті операторлар үшін дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің (ДТДТ) және бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеулердің **өте әлсіз шешімдерінің** корректілігін орнату, олардың **бар болуын, бірмәнділігін және үйлесімділігін** дәлелдеу.

Жобаның міндеттері

- бөлшектік Штурм–Лиувиль операторы үшін ДТДТ шешімдерінің бар болуы мен бірмәнділігін орнату және энергетикалық бағаларын алу;
- сингулярлы коэффициенттері және бастапқы деректері бар бөлшектік Штурм–Лиувиль операторы үшін ДТДТ шешімдерінің корректілігін **өте әлсіз шешімдер** тұжырымдамасы негізінде зерттеу;
- Штурм–Лиувиль операторы үшін бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеулер шешімдерінің бар болуы мен бірмәнділігін орнату және олардың энергетикалық бағаларын алу;
- сингулярлы коэффициенттері және бастапқы деректері бар Штурм–Лиувиль операторы үшін бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеулер шешімдерінің корректілігін **өте әлсіз шешімдер** тұжырымдамасы арқылы зерттеу.

Жобаның ғылыми жаңалығы

- **Өте әлсіз шешімдер теориясын дамыту**
Классикалық немесе әлсіз шешімдерді қолдану мүмкін болмаған жағдайда өзекті болып табылатын сингулярлы коэффициенттері бар дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін **өте әлсіз шешімдер** теориясын одан әрі дамытуға бағытталған.

- **Әдістерді интеграциялау**
Алғаш рет сингулярлы деректері және ықтимал бөлшектік туындылары бар бастапқы-шеттік есептерді талдау үшін айнымалыларды бөлу әдістері мен энергетикалық бағалар әдістері біріктіріледі.
- **Бөлшектік Штурм–Лиувилль операторларын зерттеу**
Сингулярлы дифференциалдық операторлардың, соның ішінде Штурм–Лиувилль операторларының бөлшектік дәрежелері бар теңдеулер қарастырылады, бұл қолданыстағы зерттеулер шеңберінен шығады.
- **Шешімдердің корректтілігін орнату**
Сингулярлы бастапқы деректері және бөлшектік операторлары бар есептер үшін регуляризацияланған модельдер құрылады және шешімдердің бар болуы, бірімділігі және үйлесімділігі туралы теоремалар дәлелденеді.

Жобаның ғылыми және практикалық маңыздылығы

- **PDE талдаудың математикалық әдістерін кеңейту**
Ұсынылатын тәсіл стандартты әдістермен талданбайтын, соның ішінде физикалық сингулярлықтары бар дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеуге мүмкіндік береді.
- **Халықаралық ынтымақтастық және мойындалу**
Жоба Бельгиядағы Гент университетінің Анализ және PDE орталығының халықаралық ғылыми тобымен бірлесе отырып іске асырылады, бұл ғылыми сараптаманың жоғары деңгейін және халықаралық ғылыми кеңістікке шығуды қамтамасыз етеді.
- **Әртүрлі салаларда қолданылуы**
Алынған нәтижелер физикада, инженерияда, биофизикада, толқындар мен диффузияны күрделі құрылымды немесе үзілісті қасиеттері бар орталарда модельдеуде қолданылуы мүмкін.
- **Қазақстан үшін маңыздылығы**
Сингулярлықтары және бөлшектік операторлары бар дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер саласында заманауи ғылыми мектеп қалыптастыруға бағытталып, қазақстандық математиктер бастаған зерттеулерді жалғастырып, тереңдетеді.

2024 жылға арналған күнтізбелік жоспарға сәйкес жобаны іске асыру туралы қысқаша мәліметтер

Міндеттің, кезеңнің шифры	Шарт бойынша жұмыстардың атауы және оны орындаудың негізгі кезеңдері	Негізгі нәтижелер
---------------------------	--	-------------------

1	Бөлшектік Штурм–Лиувилль операторы үшін сингулярлы коэффициенттері бар жылуөткізгіштік теңдеуі	Жылуөткізгіштік теңдеуінің бөлшектік Штурм–Лиувилль операторы үшін сингулярлы таралу коэффициенті, потенциалы және бастапқы деректері жағдайында өте әлсіз шешімдері алынды. Осы мақсатта алдымен коэффициенттері регуляр болатын теңдеу қарастырылып, шешімді коэффициенттер мен бастапқы деректер арқылы бақылау негізінде қажетті бағалар шығарылды. Нәтижелер біртекті және біртекті емес теңдеулер үшін де алынды. Сондай-ақ Штурм–Лиувилль операторымен байланысқан Соболев кеңістіктерін қолданбай-ақ бағалар алынған. Екінші бөлімде « өте әлсіз шешім » ұғымы енгізіліп, сингулярлы таралу коэффициенті мен потенциалы бар бөлшектік Штурм–Лиувилль операторы үшін жылуөткізгіштік теңдеуінің өте әлсіз шешімінің бар болуы, бірімәнділігі және келісімділігі (сәйкестігі) дәлелденді.
1.1	Бөлшектік Штурм–Лиувилль операторы үшін сингулярлы коэффициенттері бар жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімінің бар болуы мен бірімәнділігі	Штурм–Лиувилль операторы үшін таралу коэффициенті мен потенциалы бар жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімінің бар болуы мен бірімәнділігі орнатылды. Жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімін алу үшін айнымалыларды бөлу әдісі қолданылды, соның нәтижесінде есеп сингулярлы потенциалы бар Штурм–Лиувилль операторының меншікті мәндері мен меншікті функцияларын құру мәселесіне келтірілді. Одан әрі Штурм–Лиувилль операторының меншікті функцияларының Гильберт кеңістігінде тығыз екендігі фактісін пайдалану арқылы жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімі тұрғызылды. Өз кезегінде, сингулярлы потенциалы бар Штурм–Лиувилль операторы жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімінің бар болуы мен бірімәнділігін дәлелдеуде шешуші рөл атқарады. Ұсынылып отырған әдіс операторда сингулярлы потенциал болған жағдайда да Штурм–Лиувилль операторының меншікті функцияларын құруға мүмкіндік береді.
1.2	Бөлшектік Штурм–Лиувилль операторы үшін жылуөткізгіштік теңдеуінің шешіміне арналған Соболев кеңістіктерімен байланысқан бағалаулар	Бөлшектік Штурм–Лиувилль операторы үшін таралу коэффициенті мен потенциалы бар жылуөткізгіштік теңдеуінің шешіміне арналған Соболев кеңістіктерімен байланысқан маңызды бағалаулар алынды. Алынған бағалаулар шешімді бастапқы деректер, таралу коэффициенті және потенциал арқылы бақылауға мүмкіндік береді. Бұл бағалаулар бөлшектік Штурм–Лиувилль операторымен ассоциацияланған Соболев кеңістіктері мағынасында түсіндіріледі. Негізгі теоремамен қатар, бағалаулар Соболев кеңістіктеріне де, Штурм–Лиувилль операторына да тәуелсіз болатын салдар алынды. Мұндай бағалаулар кейінгі талдауда, атап айтқанда, сингулярлықтар жағдайында жылуөткізгіштік теңдеуінің өте әлсіз шешімін орнату кезінде қолданылады.

1.3	Бөлшектік Штурм–Лиувилль операторы үшін сингулярлы коэффициенттері бар жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімінің корректілігі	Бөлшектік Штурм–Лиувилль операторы үшін сингулярлы таралу коэффициенті мен потенциалы бар жылуөткізгіштік теңдеуінің өте әлсіз шешімінің бар болуы, бірімділігі және келісімділігі орнатылды. Өте әлсіз шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін алдымен үлестірім-функцияларды тегіс функциялармен свертка жасау арқылы регуляризациялау енгізілді. Одан кейін коэффициенттері мен бастапқы деректері регуляр болған жағдайда алынған шешім бағалауларының көмегімен жылуөткізгіштік теңдеуінің өте әлсіз шешімдері тұрғызылды. Өте әлсіз шешімнің бірімділігін орнату үшін біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімі пайдаланылды. Өте әлсіз шешімнің келісімділігін орнату үшін өте әлсіз шешімнің регуляр шешімге жинақталатыны көрсетілді.
-----	--	---

2024 жылға арналған күнтізбелік жоспарға сәйкес жарияланған жұмыстардың тізбесі

2024 жылға арналған күнтізбелік жоспарға сәйкес жарияланған жұмыстардың тізімі	Деректер қоры
Ruzhansky, Michael and Yeskermessuly, Alibek. "Heat equation for Sturm–Liouville operator with singular propagation and potential" Journal of Applied Analysis, 2024. https://doi.org/10.1515/jaa-2023-0146	Scopus: 29 Percentile, WOS Q4

2025 жылға арналған күнтізбелік жоспарға сәйкес жобаны іске асыру туралы қысқаша мәліметтер

Міндеттің, кезеңнің шифры	Шарт бойынша жұмыстардың атауы және оны орындаудың негізгі кезеңдері	Негізгі нәтижелер
2	Сингулярлы коэффициенттері бар Штурм–Лиувилль операторы үшін бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеу (2025 жылғы қаңтар – 2025 жылғы желтоқсан)	Штурм–Лиувилль операторы үшін сингулярлы коэффициенттері (таралу коэффициенті, потенциал және бастапқы деректер) бар бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің өте әлсіз шешімдері алынды. Осы мақсатта алдымен коэффициенттері регуляр болатын теңдеу қарастырылып, шешімді коэффициенттер мен бастапқы деректер арқылы бақылауға мүмкіндік беретін қажетті бағалаулар алынды. Нәтижелер біртекті және біртекті емес теңдеулер үшін де алынған. Сонымен қатар, Штурм–Лиувилль операторымен ассоциацияланған Соболев кеңістіктерін қолданбай-ақ бағалаулар алынған.

		Екінші бөлімде «өте әлсіз шешім» ұғымы енгізіліп, сингулярлы коэффициенттері бар Штурм–Лиувилль операторы үшін бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің өте әлсіз шешімінің бар болуы, бірімәнділігі және келісімділігі орнатылды.
2.1	Сингулярлы коэффициенттері бар Штурм–Лиувилль операторы үшін бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің шешімінің бар болуы мен бірімәнділігі (2025 жылғы қаңтар – 2025 жылғы мамыр)	Сингулярлы коэффициенттері бар Штурм–Лиувилль операторы үшін бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің шешімінің бар болуы мен бірімәнділігі орнатылды. Бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің шешімін алу үшін айнымалыларды бөлу әдісі қолданылып, есеп сингулярлы потенциалы бар Штурм–Лиувилль операторының меншікті мәндері мен меншікті функцияларын құру мәселесіне келтірілді. Одан әрі Штурм–Лиувилль операторының меншікті функцияларының Гильберт кеңістігінде тығыз екендігі фактісін пайдалану арқылы бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің шешімі тұрғызылды. Өз кезегінде, сингулярлы потенциалы бар Штурм–Лиувилль операторы бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің шешімінің бар болуы мен бірімәнділігін дәлелдеуде шешуші рөл атқарады. Ұсынылып отырған әдіс операторда сингулярлы потенциал болған жағдайда да Штурм–Лиувилль операторының меншікті функцияларын құруға мүмкіндік береді.
2.2	Бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің шешімі үшін Соболев кеңістіктерімен ассоциацияланған бағалаулар (2025 жылғы маусым – 2025 жылғы тамыз)	Штурм–Лиувилль операторы үшін таралу коэффициенті мен потенциалы бар бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің шешіміне арналған Соболев кеңістіктерімен ассоциацияланған маңызды бағалаулар алынды. Алынған бағалаулар шешімді бастапқы деректер, таралу коэффициенті және потенциал арқылы бақылауға мүмкіндік береді. Бұл бағалаулар бөлшектік Штурм–Лиувилль операторымен ассоциацияланған Соболев кеңістіктері мағынасында түсіндіріледі. Негізгі теоремамен қатар, бағалаулар Соболев кеңістіктеріне де, Штурм–Лиувилль операторына да тәуелсіз болатын салдар алынды. Мұндай бағалаулар кейінгі талдауда, атап айтқанда, сингулярлықтар жағдайында бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің өте әлсіз шешімін орнату кезінде қолданылады.
2.3	Штурм–Лиувилль операторы үшін сингулярлы коэффициенттері бар бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің шешімінің корректтілігі	Штурм–Лиувилль операторы үшін сингулярлы таралу коэффициенті мен потенциалы бар бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің өте әлсіз шешімінің бар болуы, бірімәнділігі және келісімділігі орнатылды. Өте әлсіз шешімнің бар болуын дәлелдеу үшін алдымен үлестірім-функцияларды тегіс функциялармен свертка жасау арқылы регуляризациялау енгізілді. Одан кейін коэффициенттері мен бастапқы деректері регуляр болған жағдайда алынған шешім бағалауларының көмегімен бөлшектік диффузиялық-толқындық теңдеудің өте әлсіз

		шешімдері тұрғызылды. Өте әлсіз шешімнің бірмәнділігін орнату үшін біртекті емес бөлшектік диффузиялық-толқындық тендеудің шешімі қолданылды. Ал келісімділікті орнату үшін өте әлсіз шешімнің регуляр шешімге жинақталатыны көрсетілді.
--	--	--

2025 жылға арналған күнтізбелік жоспарға сәйкес жарияланған жұмыстардың тізімі

2025 жылға арналған күнтізбелік жоспарға сәйкес жарияланған жұмыстардың тізімі	Деректер қоры
Michael Ruzhansky, Alibek Yeskermessuly, Schrödinger equation for Sturm–Liouville operator with singular propagation and potential. Z. Anal. Anwend. 44 (2025), no. 1/2, pp. 97–120. https://doi.org/10.4171/ZAA/1756	Web of Science: 50.9 (Q2), Scopus: 46% (Q3),
Ruzhansky, M., Yeskermessuly, A. Singular Klein–Gordon Equation on a Bounded Domain. J Math Sci 291, 97–116 (2025). https://doi.org/10.1007/s10958-025-07782-5	Scopus: 16% (Q4)
Sultanaev, Y., Valeev, N., & Yeskermessuly, A. (2025). Asymptotics of solutions of the Sturm-Liouville equation in vector-function space. Eurasian Mathematical Journal, 16(3), 90–101. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2025-16-3-90-101	Web of Science: 78.2% (Q1), Scopus: 67% (Q2)
Michael Ruzhansky, Mohammed Elamine Sebih, Alibek Yeskermessuly, Wave equations for the fractional Sturm-Liouville operator with singular coefficients. Filomat 39:35 (2025), 12555–12579. https://doi.org/10.2298/FIL2535555R	Web of Science: 67,6% (Q2), Scopus: 50% (Q2)

Халықаралық конференциялар



Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, workshop, 09.09.2024-28.09.2024, 03.10.2024-18.10.2024



“Analysis and PDE” Leibniz University Hannover, workshop 29.09.2024-02.10.2024





14th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications, Abu Dhabi UAE, 16.12.2025-20.12.2024



Еуразия ұлттық университетінің математика институты, Астана, семинар, 27.11.2024



“ACTUAL PROBLEMS OF ANALYSIS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ALGEBRA” (EMJ-2025), 07-11.01.2025,
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan



«Математикалық физиканың заманауи әдістері және олардың қолданыстары» ғылыми конференциясы, Ташкент, 22-24.04.2025





15th International ISAAC Congress, Nazarbayev University, Astana, 21-25.07.2025



Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, 14th Microlocal day, 22.08.2025



International Conference on Operator Theory ICOT – 2025, Hammamet, Tunisia, 21-24.12.2025

Жарияланымдар

- Ruzhansky, Michael and **Yeskermessuly, Alibek**. "Heat equation for Sturm–Liouville operator with singular propagation and potential" *Journal of Applied Analysis*, 2024. <https://doi.org/10.1515/jaa-2023-0146>
- Michael Ruzhansky, Alibek Yeskermessuly, Schrödinger equation for Sturm–Liouville operator with singular propagation and potential. *Z. Anal. Anwend.* 44 (2025), no. 1/2, pp. 97–120. <https://doi.org/10.4171/ZAA/1756>
- Ruzhansky, M., Yeskermessuly, A. Singular Klein–Gordon Equation on a Bounded Domain. *J Math Sci* 291, 97–116 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07782-5>
- Sultanaev, Y., Valeev, N., & Yeskermessuly, A. (2025). Asymptotics of solutions of the Sturm-Liouville equation in vector-function space. *Eurasian Mathematical Journal*, 16(3), 90–101. Retrieved from <https://emj.enu.kz/index.php/main/article/view/825>

- Ruzhansky, M., Sebih, M.E., Yeskermessuly, A. Wave equations for the fractional Sturm-Liouville operator with singular coefficients. Filomat 39:35 (2025), 12555–12579. <https://doi.org/10.2298/FIL2535555R>

Халыкаралык конференциялар

- Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, workshop, 09.09.2024-28.09.2024, 03.10.2024-18.10.2024;
- Analysis and PDE, Leibniz University Hannover, 29.09.2024-02.10.2024;
- 14th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications, Abu Dhabi UAE, 16.12.2025-20.12.2024;
- Институт математики Евразийского национального университета, Астана, семинар, 27.11.2024;
- ACTUAL PROBLEMS OF ANALYSIS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ALGEBRA (EMJ-2025), 07-11.01.2025, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
- Научная конференция «СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
- МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ», Ташкент, 22-24.04.2025;
- 15th International ISAAC Congress, Nazarbayev University, Astana, 21-25.07.2025;
- Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, 14th Microlocal day, 22.08.2025.
- International Conference on Operator Theory ICOT – 2025, Hammamet, Tunisia, 21-24.12.2025