

Научный проект AP23486342 «Дифференциальные уравнения с частными производными для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами» по грантовому финансированию на 2024-2026 годы

Руководитель проекта: декан факультета естествознания и информатизации, доктор PhD Ескермесұлы Әлібек

### **Сумма и сроки реализации проекта**

Общая сумма 75 359 323,00 тенге, в том числе по годам:

- на 2024 год – 25 341 212,00 тенге;
- на 2025 год – 25 171 039,00 тенге;
- на 2026 год – 24 847 072,00 тенге.

### **Цель проекта**

Установление корректности решений, доказательство существования, единственности и согласованности очень слабых решений дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП) и дробно-диффузионно-волновых уравнений для классических и дробных операторов типа Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами и сингулярными начальными и граничными условиями.

### **Задачи проекта**

- установление существования и единственности решений и получение энергетических оценок решений для ДУЧП для дробного оператора Штурма-Лиувилля;
- исследование корректности решений ДУЧП для дробного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами и начальными данными с использованием концепции очень слабых решений;
- установление существования и единственности решений и получение энергетических оценок решений для дробно-диффузионно-волновых уравнений для оператора Штурма-Лиувилля;
- исследование корректности решений дробно-диффузионно-волновых уравнений для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами и начальными данными с использованием концепции очень слабых решений.

### **Научная новизна проекта**

- **Развитие теории очень слабых решений**

Проект направлен на дальнейшее развитие теории «очень слабых решений» для уравнений с частными производными, содержащих сингулярные коэффициенты, что актуально при невозможности использования классических или слабых решений.

- **Интеграция методов**

Впервые объединяются методы **разделения переменных** и **энергетических оценок** для анализа начально-краевых задач с сингулярными данными и потенциально дробными производными.

- **Исследование дробных операторов Штурма–Лиувилля**

Рассматриваются уравнения с дробными степенями сингулярных дифференциальных операторов, в том числе операторов Штурма–Лиувилля, что выходит за рамки существующих работ.

- **Установление корректности решений**

Для задач с сингулярными начальными данными и дробными операторами строятся **регуляризованные модели** и доказываются теоремы существования, единственности и согласованности решений.

### Научная и практическая значимость проекта

- **Расширение математических методов анализа PDE**

Предлагаемый подход позволяет решать уравнения с частными производными, которые ранее не поддавались анализу стандартными методами, включая уравнения с физическими сингулярностями.

- **Международное сотрудничество и признание**

Проект реализуется в сотрудничестве с международной научной группой Центра анализа и PDE Гентского университета (Бельгия), что обеспечивает высокий уровень научной экспертизы и выход на международную арену.

- **Применение в различных областях**

Полученные результаты могут быть применимы в физике, инженерии, биофизике, моделировании волн и диффузии в средах со сложной структурой или разрывными свойствами.

- **Значимость для Казахстана**

Продолжает и углубляет исследования, начатые казахстанскими математиками, с фокусом на построение современной научной школы в области PDE с сингулярностями и дробными операторами.

### Краткие сведения о реализации проекта в соответствии с календарным планом за 2024 год

Шифр задания, этапа	Наименование работ по Договору и основные этапы его выполнения	Основные результаты
1	Уравнение теплопроводности с сингулярными коэффициентами для дробного оператора Штурма-Лиувилля	Получены очень слабые решения уравнения теплопроводности для дробного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным распространением, потенциалом и начальными данными. Для этого сначала рассматривается уравнение с регулярными коэффициентами, получены необходимые оценки контролируя решение с помощью коэффициентов и начальных данных. Результаты получены как для однородного, так и для неоднородного уравнения. Также получены оценки без участия соболевских пространств ассоциированных с оператором Штурма-Лиувилля. В второй части вводится понятие «очень слабые решения» и устанавливаем существование, единственность и согласованность очень слабого решения уравнения теплопроводности для дробного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным распространением и потенциалом.
1.1	Существование и единственность решения уравнения теплопроводности с	Были установлены существование, единственность решения уравнения теплопроводности для оператора Штурма-Лиувилля с распространением и потенциалом. Для получения решения уравнения теплопроводности используется метод разделения переменных, с помощью чего уравнение сводится к проблеме построения собственных значений и

	сингулярными коэффициентами для дробного оператора Штурма-Лиувилля	собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом. Далее, используя тот факт, что собственные функции оператора Штурма-Лиувилля плотны в гильбертовом пространстве, строится решение уравнения теплопроводности. В свою очередь, оператор Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом играет ключевую роль при доказательстве существования и единственности решения уравнения теплопроводности. Наш метод позволяет строить собственные функции оператора Штурма-Лиувилля, даже если оператор имеет сингулярный потенциал.
1.2	Оценки, ассоциированные с пространствами Соболева для решения уравнения теплопроводности для дробного оператора Штурма-Лиувилля	Получены важные оценки, ассоциированные с пространствами Соболева для решения уравнения теплопроводности для дробного оператора Штурма-Лиувилля с распространением и потенциалом. Полученные оценки позволяют контролировать решение с помощью начальных данных, распространения и потенциала. Оценки понимаются в смысле соболевских пространств ассоциированных дробным оператором Штурма-Лиувилля. Помимо основной теоремы, получено следствие, где оценки не зависят от соболевских пространств и оператора Штурма-Лиувилля. Такие оценки используются в дальнейшем анализе, в частности при установлении очень слабого решения уравнения теплопроводности при сингулярностях.
1.3	Корректность решения уравнения теплопроводности с сингулярными коэффициентами для дробного оператора Штурма-Лиувилля	Установлены существование, единственность и согласованность очень слабого решения уравнения теплопроводности для дробного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным распространением и потенциалом. Для установления существования очень слабого решения сначала вводится регуляризации функции-распределителей с помощью свертки с гладкими функциями. Далее получили очень слабые решения с помощью оценок решения уравнения при регулярном поведении коэффициентов и начальных данных. Для установления единственности очень слабого решения применено решение неоднородного уравнения теплопроводности. Для установления согласованности очень слабого решения показаны, что очень слабое решение сходится с регулярным решением.

#### **Перечень опубликованных работ в соответствии с календарным планом за 2024 год**

<b>Перечень опубликованных работ в соответствии с календарным планом за 2024 год</b>	<b>База данных</b>
<b>Ruzhansky, Michael and Yeskermessuly, Alibek. "Heat equation for Sturm–Liouville operator with singular</b>	Scopus: 29 Percentile, WOS Q4

**Краткие сведения о реализации проекта в соответствии с календарным планом за 2025 год**

Шифр задания, этапа	Наименование работ по Договору и основные этапы его выполнения	Основные результаты
2	Дробно-диффузионно-волновое уравнение для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами (Январь 2025-Декабрь 2025)	Получены очень слабые решения дробно-диффузионно-волнового уравнения для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами: распространением, потенциалом и начальными данными. Для этого сначала рассматривается уравнение с регулярными коэффициентами, получены необходимые оценки контролируя решение с помощью коэффициентов и начальных данных. Результаты получены как для однородного, так и для неоднородного уравнения. Также получены оценки без участия соболевских пространств ассоциированных с оператором Штурма-Лиувилля. В второй части вводится понятие «очень слабые решения» и устанавливаем существование, единственность и согласованность очень слабого решения дробно-диффузионно-волнового уравнения для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами.
2.1	Существование и единственность решения дробно-диффузионно-волнового уравнения для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами (Январь 2025-Май 2025)	Были установлены существование, единственность решения дробно-диффузионно-волнового уравнения для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами. Для получения решения дробно-диффузионно-волнового уравнения используется метод разделения переменных, с помощью чего уравнение сводится к проблеме построения собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом. Далее, используя тот факт, что собственные функции оператора Штурма-Лиувилля плотны в гильбертовом пространстве, строится решение дробно-диффузионно-волнового уравнения. В свою очередь, оператор Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом играет ключевую роль при доказательстве существования и единственности решения дробно-диффузионно-волнового уравнения. Наш метод позволяет строить собственные функции оператора Штурма-Лиувилля, даже если оператор имеет сингулярный потенциал.
2.2	Оценки, ассоциированные с пространствами Соболева для решения дробно-	Получены важные оценки, ассоциированные с пространствами Соболева для решения дробно-диффузионно-волнового уравнения для оператора Штурма-Лиувилля с распространением и потенциалом.

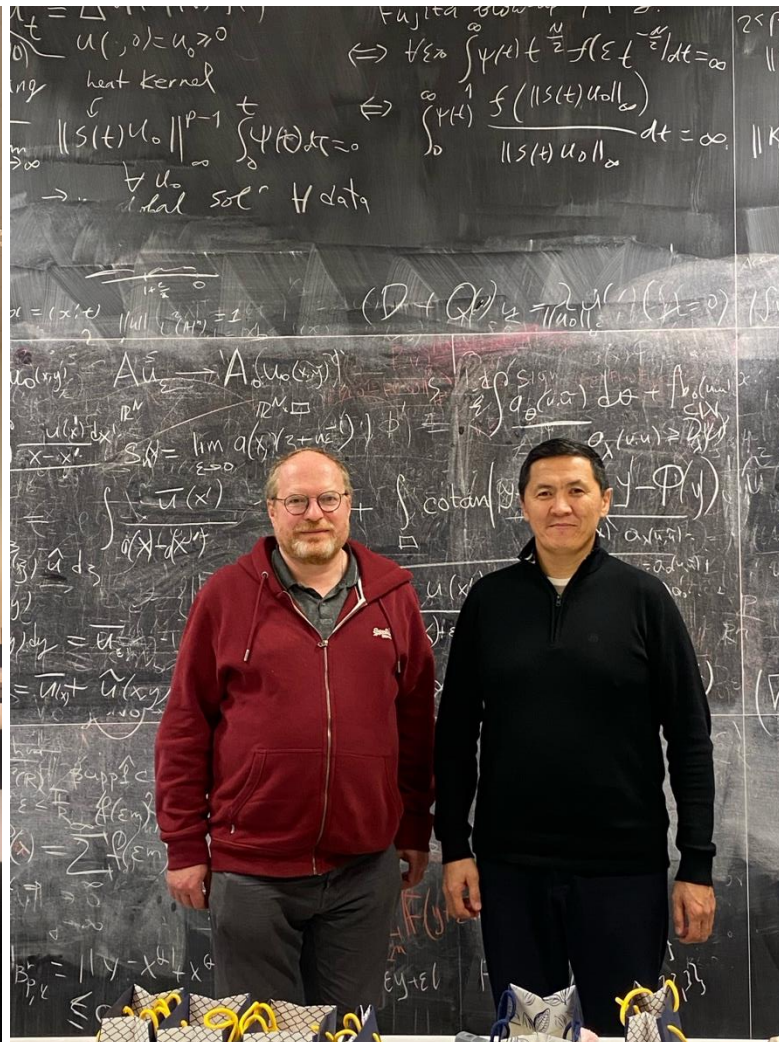
	диффузионно-волнового уравнения (Июнь 2025-Август 2025)	Полученные оценки позволяют контролировать решение с помощью начальных данных, распространения и потенциала. Оценки понимаются в смысле соболевских пространств ассоциированных дробным оператором Штурма-Лиувилля. Помимо основной теоремы, получено следствие, где оценки не зависят от соболевских пространств и оператора Штурма-Лиувилля. Такие оценки используются в дальнейшем анализе, в частности при установлении очень слабого решения дробно-диффузионно-волнового уравнения при сингулярностях.
2.3	Корректность решения дробно-диффузионно-волнового уравнения с сингулярными коэффициентами для оператора Штурма-Лиувилля	Установлены существование, единственность и согласованность очень слабого решения дробно-диффузионно-волнового уравнения для оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным распространением и потенциалом. Для установления существования очень слабого решения сначала вводится регуляризации функции-распределителей с помощью свертки с гладкими функциями. Далее получили очень слабые решения с помощью оценок решения уравнения при регулярном поведении коэффициентов и начальных данных. Для установления единственности очень слабого решения применено решение неоднородного дробно-диффузионно-волнового уравнения. Для установления согласованности очень слабого решения мы показали, что очень слабое решение сходится с регулярным решением.

#### Перечень опубликованных работ в соответствии с календарным планом за 2025 год

Перечень опубликованных работ в соответствии с календарным планом за 2025 год	База данных
Michael Ruzhansky, Alibek Yeskermessuly, Schrödinger equation for Sturm–Liouville operator with singular propagation and potential. Z. Anal. Anwend. 44 (2025), no. 1/2, pp. 97–120. <a href="https://doi.org/10.4171/ZAA/1756">https://doi.org/10.4171/ZAA/1756</a>	Web of Science: 50.9 (Q2), Scopus: 46% (Q3),
Ruzhansky, M., Yeskermessuly, A. Singular Klein–Gordon Equation on a Bounded Domain. J Math Sci 291, 97–116 (2025). <a href="https://doi.org/10.1007/s10958-025-07782-5">https://doi.org/10.1007/s10958-025-07782-5</a>	Scopus: 16% (Q4)
Sultanaev, Y., Valeev, N., & Yeskermessuly, A. (2025). Asymptotics of solutions of the Sturm-Liouville equation in	Web of Science: 78.2% (Q1), Scopus: 67% (Q2)

<p>vector-function space. <b>Eurasian Mathematical Journal</b>, 16(3), 90–101. <a href="https://doi.org/10.32523/2077-9879-2025-16-3-90-101">https://doi.org/10.32523/2077-9879-2025-16-3-90-101</a></p>	
<p><b>Michael Ruzhansky, Mohammed Elamine Sebih, Alibek Yeskermessuly, Wave equations for the fractional Sturm-Liouville operator with singular coefficients. <i>Filomat</i> 39:35 (2025), 12555–12579. <a href="https://doi.org/10.2298/FIL2535555R">https://doi.org/10.2298/FIL2535555R</a></b></p>	<p>Web of Science: 67,6% (Q2), Scopus: 50% (Q2)</p>

## Международные конференции



Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, workshop, 09.09.2024-28.09.2024, 03.10.2024-18.10.2024





“Analysis and PDE” Leibniz University Hannover, workshop 29.09.2024-02.10.2024





14th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications, Abu Dhabi UAE, 16.12.2025-20.12.2024



Институт математики Евразийского национального университета, Астана, семинар, 27.11.2024





“ACTUAL PROBLEMS OF ANALYSIS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ALGEBRA” (EMJ-2025), 07-11.01.2025,  
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan



Научная конференция «СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ», Ташкент, 22-24.04.2025









15th International ISAAC Congress, Nazarbayev University, Astana, 21-25.07.2025



Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, 14th Microlocal day, 22.08.2025





International Conference on Operator Theory ICOT – 2025, Hammamet, Tunisia, 21-24.12.2025

## Публикации

- Ruzhansky, Michael and **Yeskermessuly, Alibek**. "Heat equation for Sturm–Liouville operator with singular propagation and potential" *Journal of Applied Analysis*, 2024. <https://doi.org/10.1515/jaa-2023-0146>
- Michael Ruzhansky, Alibek Yeskermessuly, Schrödinger equation for Sturm–Liouville operator with singular propagation and potential. *Z. Anal. Anwend.* 44 (2025), no. 1/2, pp. 97–120. <https://doi.org/10.4171/ZAA/1756>
- Ruzhansky, M., Yeskermessuly, A. Singular Klein–Gordon Equation on a Bounded Domain. *J Math Sci* 291, 97–116 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07782-5>
- Sultanaev, Y., Valeev, N., & Yeskermessuly, A. (2025). Asymptotics of solutions of the Sturm-Liouville equation in vector-function space. *Eurasian Mathematical Journal*, 16(3), 90–101. Retrieved from <https://emj.enu.kz/index.php/main/article/view/825>

- Ruzhansky, M., Sebih, M.E., Yeskermessuly, A. Wave equations for the fractional Sturm-Liouville operator with singular coefficients. Filomat 39:35 (2025), 12555–12579. <https://doi.org/10.2298/FIL2535555R>

#### **Международные конференции**

- Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, workshop, 09.09.2024-28.09.2024, 03.10.2024-18.10.2024;
- Analysis and PDE, Leibniz University Hannover, 29.09.2024-02.10.2024;
- 14th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications, Abu Dhabi UAE, 16.12.2025-20.12.2024;
- Институт математики Евразийского национального университета, Астана, семинар, 27.11.2024;
- ACTUAL PROBLEMS OF ANALYSIS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ALGEBRA (EMJ-2025), 07-11.01.2025, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
- Научная конференция «СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
- МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ», Ташкент, 22-24.04.2025;
- 15th International ISAAC Congress, Nazarbayev University, Astana, 21-25.07.2025;
- Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, 14th Microlocal day, 22.08.2025.
- International Conference on Operator Theory ICOT – 2025, Hammamet, Tunisia, 21-24.12.2025